第４講　整数の性質

1

(1)　不定方程式

$$7x-31y=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす自然数 x，y の組の中で，x が最小のものは

$x=$ ア ，　$y=$ イ

であり，不定方程式①のすべての整数解は，k を整数として

$x=$ ウエ $k+$ ア ，　$y=$ オ $k+$ イ

と表せる。

（次ページに続く。）

(2)　自然数 n に対し，n^2 を [オ] で割った余りが [イ] となるのは，n を [オ] で割った余りが，**[カ]** または **[キ]** のときである。ただし，[カ]，[キ] の解答の順序は問わない。

(3)　不定方程式①の整数解 y のうち，ある自然数 n を用いて $y=n^2$ と表せるものを小さい方から四つ並べると

[ク]，**[ケコ]**，**[サシス]**，**[セソタ]**

である。

(4)　$\sqrt{31(7x-1)}$ が整数であるような自然数 x のうち，$x \geqq 1000$ を満たす最小のものは **[チツテト]** である。x が [チツテト] のとき，$\sqrt{31(7x-1)}$ の値は **[ナニヌ]** である。

2

(1)　整数 k が $0 \leqq k < 5$ を満たすとする。$77k = 5 \times 15k + 2k$ に注意すると，$77k$ を 5 で割った余りが 1 となるのは $k =$ **ア** のときである。

(2)　三つの整数 k，ℓ，m が

$$0 \leqq k < 5,\quad 0 \leqq \ell < 7,\quad 0 \leqq m < 11$$

を満たすとする。このとき

$$\frac{k}{5} + \frac{\ell}{7} + \frac{m}{11} - \frac{1}{385} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

が整数となる k，ℓ，m を求めよう。

①の値が整数のとき，その値を n とすると

$$\frac{k}{5} + \frac{\ell}{7} + \frac{m}{11} = \frac{1}{385} + n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。②の両辺に 385 を掛けると

$$77k + 55\ell + 35m = 1 + 385n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

となる。これより

$$77k = 5(-11\ell - 7m + 77n) + 1$$

となることから，$77k$ を 5 で割った余りは 1 なので $k =$ ア である。

(次ページに続く。)

同様にして

$$55\ell=7(-11k-5m+55n)+1$$

および

$$35m=11(-7k-5\ell+35n)+1$$

であることに注意すると，$\ell=$ **イ** および $m=$ **ウ** が得られる。

　なお，$k=$ ア ，$\ell=$ イ ，$m=$ ウ を③に代入すると $n=2$ であることがわかる。

（次ページに続く。）

(3)　三つの整数 x, y, z が

$$0 \leqq x < 5,\ 0 \leqq y < 7,\ 0 \leqq z < 11$$

を満たすとする。次の形の整数

$$77 \times \boxed{\text{ア}} \times x + 55 \times \boxed{\text{イ}} \times y + 35 \times \boxed{\text{ウ}} \times z$$

を 5, 7, 11 で割った余りがそれぞれ 2, 4, 5 であるとする。このとき，x, y, z を求めよう。$77 \times \boxed{\text{ア}} \times x$ を 5 で割った余りが 2 であることから $x = \boxed{\text{エ}}$ となる。同様にして $y = \boxed{\text{オ}}$，$z = \boxed{\text{カ}}$ となる。

x, y, z を上で求めた値として，整数 p を

$$p = 77 \times \boxed{\text{ア}} \times x + 55 \times \boxed{\text{イ}} \times y + 35 \times \boxed{\text{ウ}} \times z$$

で定める。このとき，5, 7, 11 で割った余りがそれぞれ 2, 4, 5 である整数 M は，ある整数 r を用いて $M = p + 385r$ と表すことができる。

(4)　整数 p を(3)で定めたものとする。p^a を 5 で割った余りが 1 となる正の整数 a のうち，最小のものは $a = 4$ である。また，p^b を 7 で割った余りが 1 となる正の整数 b のうち，最小のものは $b = \boxed{\text{キ}}$ となる。さらに，p^c を 11 で割った余りが 1 となる正の整数 c のうち，最小のものは $c = \boxed{\text{ク}}$ である。

p^8 を 385 で割った余りを q とするとき，q を求めよう。p^8 を 5, 7, 11 で割った余りを利用して(3)と同様に考えると，$q = \boxed{\text{ケコサ}}$ であることがわかる。

第４講　整数の性質

1 (1)　$7x-31y=1$　……①　$\Longleftrightarrow$　$7x=31y+1$ は，y が最小のとき x も最小となる。

$y=1$ のとき　$7x=32$　　これを満たす自然数 x はない

$y=2$ のとき　$7x=63$　　$x=9$

したがって，①を満たす自然数 x，y の組の中で，x が最小のものは

$x=9$，$y=2$

よって，不定方程式①の解の１つが $x=9$，$y=2$ であるから

$7\cdot9-31\cdot2=1$　……②

が成立する。①－②より

$7(x-9)-31(y-2)=0$　　つまり　$7(x-9)=31(y-2)$

7と31は互いに素であるから，$x-9$は31の倍数である。よって，整数 k を用いて

$x-9=31k$

と表される。したがって，不定方程式①のすべての整数解は，整数 k を用いて

$x=31k+9$，$y=7k+2$

と表される。

(2)　自然数 n を７で割った余りを r ($r=0$，1，2，……，6) とすると，n は整数 m を用いて

$n=7m+r$

と表される。このとき

$n^2=(7m+r)^2$

$=49m^2+14mr+r^2$

$=7(7m^2+2mr)+r^2$

よって，n^2 を７で割った余りは，r^2 を７で割った余りと一致する。

$r^2=0$，1，4，9，16，25，36

であることから，n^2 を７で割った余りが２になるのは，r^2 を７で割った余りが２になるとき，すなわち　$r=3$，4 のときである。

したがって，自然数 n に対し，n^2 を７で割った余りが２となるのは，n を７で割った余りが３または４のときである。

(参考)

$n=7k\pm1$ のとき　$n^2=(7k\pm1)^2=49k^2\pm14k+1=7(7k^2\pm2k)+1$

$n=7k\pm2$ のとき　$n^2=(7k\pm2)^2=49k^2\pm28k+4=7(7k^2\pm4k)+4$

$n=7k\pm3$ のとき　$n^2=(7k\pm3)^2=49k^2\pm42k+9=7(7k^2\pm6k+1)+2$

(3)　不定方程式①の整数解 y は，(1)より整数 k を用いて $y=7k+2$ と表される。つまり，y を７で割ると余りが２である。

この整数 y が，自然数 n を用いて $y=n^2$ と表されるとき，(2)より n を７で割った余りが３または４である。そのような自然数 n を小さい方から四つ並べると

$n=3,\ 4,\ 10,\ 11$

である。このとき，n^2 すなわち y は小さい方から順に 9，16，100，121 である。

(4)　$\sqrt{31(7x-1)}$ が整数となるのは，$7x-1$ が整数 y，n^2 を用いて

$7x-1=31y\quad(y=n^2)$

と表されるときである。

$7x-1=31y$ は，不定方程式①と一致し，その解は(1)より整数 k を用いて

$x=31k+9,\ y=7k+2$

と表される。また，$y=n^2$ と表されるとき，(2)より n を 7 で割った余りが 3 または 4 である。

$x\geqq 1000$ より，$31k+9\geqq 1000$　　$k\geqq \dfrac{991}{31}=31.9\cdots\cdots$　　よって，$k\geqq 32$

このとき，$y=7k+2\geqq 7\cdot 32+2=226$

また，$y=n^2$ を満たす自然数 n は，小さい方より $n=3,\ 4,\ 10,\ 11,\ 17,\ \cdots\cdots$ であり，n^2 すなわち y は小さい方から順に 9，16，100，121，289，…… である。

よって，$y\geqq 226$ かつ $y=n^2$ を満たす最小の自然数 y は $y=289$

このとき $7k+2=289$ より $k=41$ であり，$x=31k+9=31\cdot 41+9=1280$

したがって，$\sqrt{31(7x-1)}$ が整数となるような自然数 x のうち，$x\geqq 1000$ を満たす最小のものは $x=1280$ である。

このとき，$\sqrt{31(7x-1)}=\sqrt{31\cdot 31y}=\sqrt{31^2\cdot n^2}=\sqrt{31^2\cdot 17^2}=31\cdot 17=527$

2　(1)　$77k=5\times 15k+2k$ より，$77k$ を 5 で割った余りは，$2k$ を 5 で割った余りと一致する。

$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ のとき，$2k$ はそれぞれ 0，2，4，6，8 であり，$2k$ を 5 で割った余りはそれぞれ 0，2，4，1，3 であるから，$77k$ を 5 で割った余りが 1 となるのは $k=3$ のときである。

(2)　$55\ell=7\times 7\ell+6\ell$ であるから，55ℓ を 7 で割った余りは，6ℓ を 7 で割った余りと一致する。

$\ell=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のとき，6ℓ はそれぞれ 0，6，12，18，24，30，36 であり，6ℓ を 7 で割った余りはそれぞれ 0，6，5，4，3，2，1 であるから，55ℓ を 7 で割った余りが 1 となるのは $\ell=6$ のときである。

$35m=11\times 3m+2m$ であるから，$35m$ を 11 で割った余りは，$2m$ を 11 で割った余りと一致する。$m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$ のとき，$2m$ はそれぞれ 0，2，4，6，8，10，12，14，16，18，20 であり，$2m$ を 11 で割った余りはそれぞれ 0，2，4，6，8，10，1，3，5，7，9 であるから，$35m$ を 11 で割った余りが 1 となるのは $m=6$ のときである。

(3)　$77\times 3\times x+55\times 6\times y+35\times 6\times z$ について，$55\times 6\times y$，$35\times 6\times z$ は 5 で割り切れる。

77×3 は，(1)より 5 で割った余りが 1 である。

よって，$77\times3\times x$ を5で割った余りは，$1\times x$ を5で割った余りに等しい。
その余りが2であることから，$0\leqq x<5$ を満たす整数 x は $x=2$
$77\times3\times x+55\times6\times y+35\times6\times z$ について，$77\times3\times x$，$35\times6\times z$ は7で割り切れる。
55×6 は，(2)より7で割った余りが1である。
よって，$55\times6\times y$ を7で割った余りは，$1\times y$ を7で割った余りに等しい。
その余りが4であることから，$0\leqq y<7$ を満たす整数 y は $y=4$
$77\times3\times x+55\times6\times y+35\times6\times z$ について，$77\times3\times x$，$55\times6\times y$ は11で割り切れる。
35×6 は，(2)より11で割った余りが1である。
よって，$35\times6\times z$ を11で割った余りは，$1\times z$ を11で割った余りに等しい。
その余りが5であることから，$0\leqq z<11$ を満たす整数 z は $z=5$
よって，$p=77\times3\times2+55\times6\times4+35\times6\times5$ と定めると，5，7，11で割った余りがそれぞれ2，4，5である整数 M は，整数 r を用いて

$$M=p+385r(=p+5\cdot7\cdot11r)$$

と表すことができる。

(4)　p を5で割った余りが2であることから，p^a を5で割った余りは，2^a を5で割った余りに等しい。$a=1$ から順に 2^a および 2^a を5で割った余りを求めると，初めて余りが1になるのは $a=4$ のときである。
p を7で割った余りが4であることから，p^b を7で割った余りは，4^b を7で割った余りに等しい。$b=1$ から順に 4^b および 4^b を7で割った余りを求めると，初めて余りが1になるのは $b=3$ のときである。
p を11で割った余りが5であることから，p^c を11で割った余りは，5^c を11で割った余りに等しい。$c=1$ から順に 5^c および 5^c を11で割った余りを求めると，初めて余りが1になるのは $c=5$ のときである。

p を5で割った余りが2であることから，p^8 を5で割った余りは，2^8 を5で割った余りに等しい。2^4 を5で割った余りは1であることから，$2^8=2^4\cdot2^4$ を5で割った余りは，$1\cdot1=1$ を5で割った余りに等しく，1である。
p を7で割った余りが4であることから，p^8 を7で割った余りは，4^8 を7で割った余りに等しい。4^3 を7で割った余りは1であることから，$4^8=4^3\cdot4^3\cdot4^2$ を7で割った余りは，$1\cdot1\cdot4^2=16$ を7で割った余りに等しく，2である。
p を11で割った余りが5であることから，p^8 を11で割った余りは，5^8 を11で割った余りに等しい。5^5 を11で割った余りは1であることから，$5^8=5^5\cdot5^3$ を11で割った余りは，$1\cdot5^3=125$ を11で割った余りに等しく，4である。
よって，(3)と同様に考えると，5，7，11で割った余りがそれぞれ1，2，4である整数は

$$77\times3\times1+55\times6\times2+35\times6\times4=1731$$

であり，p^8 はある整数 r を用いて

$$p^8=1731+385r$$

と表される。$1731=385\cdot 4+191$ であることから，p^8 を 385 で割った余りは 191 である。